

6. PROPIEDADES ONDULATORIAS DE LA MATERIA

El postulado de Broglie

El desarrollo de la Mecánica Cuántica comenzó con una idea muy simple pero revolucionaria que fue expuesta en 1924 por Louis-Victor de Broglie en su Tesis Doctoral. Inspirado por el comportamiento dual onda-corpúsculo de la radiación, de Broglie especuló sobre la posibilidad que también la materia tuviera un comportamiento dual, esto es que las entidades físicas que consideramos como partículas (electrones, átomos, bolas de billar, etc.) pudieran en determinadas circunstancias manifestar propiedades ondulatorias.

Hemos visto que la naturaleza corpuscular de la radiación electromagnética se pone en evidencia cuando se estudia su interacción con la materia (emisión y absorción, efecto fotoeléctrico, efecto Compton, creación y aniquilación de pares, etc.). Por otra parte, su naturaleza ondulatoria se manifiesta por la forma con que se propaga, dando lugar a los fenómenos de interferencia y difracción. Esta situación se puede describir diciendo que la radiación electromagnética es una onda que al interactuar con la materia manifiesta un comportamiento corpuscular. Con igual derecho podemos también decir que consta de partículas (los fotones) cuyo movimiento está determinado por las propiedades de propagación de ciertas ondas que les están asociadas. En realidad ambos puntos de vista son aceptables. Pensando en términos de la segunda alternativa y razonando por analogía, de Broglie exploró la idea que el movimiento de una *partícula* está gobernado por la propagación de ciertas *ondas piloto* asociadas con ella. Ciertamente, es muy sugestivo el hecho que la constante de Planck juegue un rol crucial, tanto para el comportamiento de los electrones del átomo (como lo muestra claramente el éxito de la teoría de Bohr) como para la interacción de la radiación con la materia. En el caso de la radiación, h está vinculado con los aspectos corpusculares de la misma. No es absurdo entonces especular sobre la posibilidad que en el caso de una partícula como el electrón, h esté relacionado con alguna clase de comportamiento ondulatorio.

Cuando de Broglie publicó su trabajo aún no se habían observado comportamientos ondulatorios asociados con el movimiento de una partícula, aunque el tema había sido investigado en varias ocasiones. Pero esta falta de evidencia no es excluyente, pues si en esas ocasiones la longitud de onda de las ondas piloto hubiese sido muy corta no hubiera sido posible observar los aspectos ondulatorios. Esta situación se da también en la Óptica, donde para observar interferencia o difracción es preciso que las diferencias de caminos ópticos sean del orden de la longitud de onda de la luz empleada. Cuando esto no ocurre, la propagación de la luz se puede describir adecuadamente mediante la óptica geométrica, que es en esencia una teoría corpuscular.

Para determinar la longitud de onda de las ondas piloto, de Broglie procedió por analogía a lo que se hace con la radiación electromagnética, considerada como un conjunto de fotones. De acuerdo con la ecuación de Einstein, la frecuencia de un fotón de energía E es

$$\nu = E/h \quad (6.1)$$

La longitud de onda se calcula mediante la relación usual

$$\lambda = v_f/\nu \quad (6.2)$$

donde v_f es la velocidad de fase de la onda. Para el caso del fotón, $v_f = c$ de modo que

$$\lambda = c/v = hc/E \quad (6.3)$$

Recordando que la cantidad de movimiento del fotón es $p = E/c$, tenemos que

$$\lambda = h/p \quad (6.4)$$

En consecuencia, por analogía con las ecs. (6.1) y (6.4), se puede formular el

Postulado de Broglie:

La longitud de onda y la frecuencia de la onda piloto asociada a una partícula de impulso p y energía relativística total E están dadas por

$$\lambda = h/p \quad , \quad \nu = E/h \quad (6.5)$$

y el movimiento de la partícula está regido por la propagación de las ondas piloto.

La longitud de onda de la onda piloto se llama *longitud de onda de Broglie* de la partícula.

Algunas propiedades de las ondas piloto

En la descripción del movimiento de la partícula por medio de la onda piloto está implícita la hipótesis que la posición de la partícula está determinada por la onda, en el sentido que la probabilidad de encontrar la partícula en un dado lugar está relacionada con la amplitud de la onda en ese lugar. Si bien aún no conocemos la ecuación que rige la propagación de la onda piloto, podemos hacer algunas afirmaciones sobre su comportamiento, basadas en las propiedades generales de las ondas. Para simplificar trataremos una sola dimensión espacial, pues la generalización a tres dimensiones es obvia. En primer lugar, para que se puedan presentar interferencia y difracción, las ondas piloto deben cumplir el principio de superposición. Por lo tanto podemos construir paquetes de onda de la forma:

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k') e^{-i\varphi(k')} e^{i(k'x - \omega't)} dk' \quad (6.6)$$

que es una superposición de ondas planas del tipo¹

$$\Psi_{k'} = e^{i(k'x - \omega't)} \quad (6.7)$$

con una distribución espectral dada por la función real $A(k')$ y fases $\varphi(k')$, donde

$$k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{p'}{\hbar} \quad , \quad \omega' = \omega(k') = 2\pi\nu' = \frac{E'}{\hbar} \quad (6.8)$$

¹ El lector no se debe sentir incómodo porque $\Psi(x,t)$ y Ψ_k sean complejas. Es más sencillo para el cálculo usar exponenciales imaginarias en lugar de senos o cosenos y de últimas, si se desea, se puede siempre tomar la parte real de $\Psi(x,t)$ y Ψ_k . Además, veremos en el Capítulo 7 que las ondas asociadas con las partículas *son* complejas.

Ahora bien, de $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ resulta

$$\frac{\partial E}{\partial p} = c^2 \frac{p}{E} \quad (6.13)$$

y puesto que $E = mc^2$ y $p = mv$, donde v es la velocidad de la partícula, obtenemos que

$$v_g = v \quad (6.14)$$

esto es, el grupo se desplaza con la velocidad de la partícula, como debe ser para que la descripción del movimiento dada por la onda piloto sea consistente. Notar que de (6.9) y (6.14) se obtiene que $v_g v_f = c^2$

El experimento de Davisson y Germer

Claramente, los aspectos ondulatorios del movimiento de una partícula sólo se manifiestan si la longitud de onda de Broglie (6.5) es del orden de magnitud de alguna dimensión característica del experimento y dada la pequeñez de h , esto no es fácil de conseguir. Por ejemplo, una partícula de polvo cuya masa es de 10^{-11} g y que se desplaza con una velocidad de 1 cm/s tiene una longitud de onda de Broglie del orden de 10^{-15} cm, que es despreciable en comparación con el tamaño de cualquier sistema físico (recordemos que el núcleo atómico tiene un radio del orden de 10^{-12} cm). Por consiguiente no se puede verificar el postulado de Broglie estudiando el movimiento de partículas macroscópicas.

Consideremos ahora un electrón de 10 eV de energía, que es del orden de magnitud de la energía cinética del electrón en un átomo de hidrógeno. En este caso resulta

$$\lambda \cong 3.9 \times 10^{-8} \text{ cm} \quad (6.15)$$

que si bien es pequeña, es del orden del tamaño de un átomo y por lo tanto de la distancia interatómica en un cristal. Esto sugiere que cuando un haz de electrones se refleja sobre un cristal, o lo atraviesa, se pueda observar la difracción de la onda piloto.

Los primeros en observar este efecto fueron Clinton Davisson y Lester Germer, en 1927. En su experimento hicieron incidir un haz de electrones de 54 eV (cuya longitud de onda de Broglie es de 1.67 \AA) sobre la superficie de un cristal de níquel (distancia interatómica $d = 2.15 \text{ \AA}$), y midieron la cantidad $N(\theta)$ de electrones dispersados a distintos ángulos θ . Encontraron que $N(\theta)$ tiene un pico para $\theta \approx 50^\circ$ (ver Fig. 6.2). Este resultado *prueba cualitativamente el postulado de Broglie*. En efecto, el pico sólo se puede explicar como el efecto de la interferencia constructiva de las ondas dispersadas por los átomos regularmente espaciados sobre la superficie del cristal. Se debe observar que se trata de la interferencia de las ondas asociadas a *un único electrón*, y que provienen de varias partes del cristal. Esto se puede demostrar empleando un haz de intensidad tan pequeña que en todo instante un único electrón está viajando en el aparato; en este caso se observa que la distribución angular de los electrones dispersados no cambia.

Los resultados de Davisson y Germer también confirman *cuantitativamente* el postulado de Broglie. Recordemos la conocida fórmula de la red de difracción (ley de Bragg):

$$d \sin \theta = n \lambda \quad (6.16)$$

Si suponemos que el pico a 50° corresponde a difracción del primer orden ($n = 1$) la (6.16) nos da $\lambda = 1.65 \text{ \AA}$, que dentro de la precisión del experimento concuerda con el valor de la longitud de onda calculada mediante la (6.5). Para voltajes de aceleración mayores se puede observar también un segundo pico (correspondiente a $n = 2$).

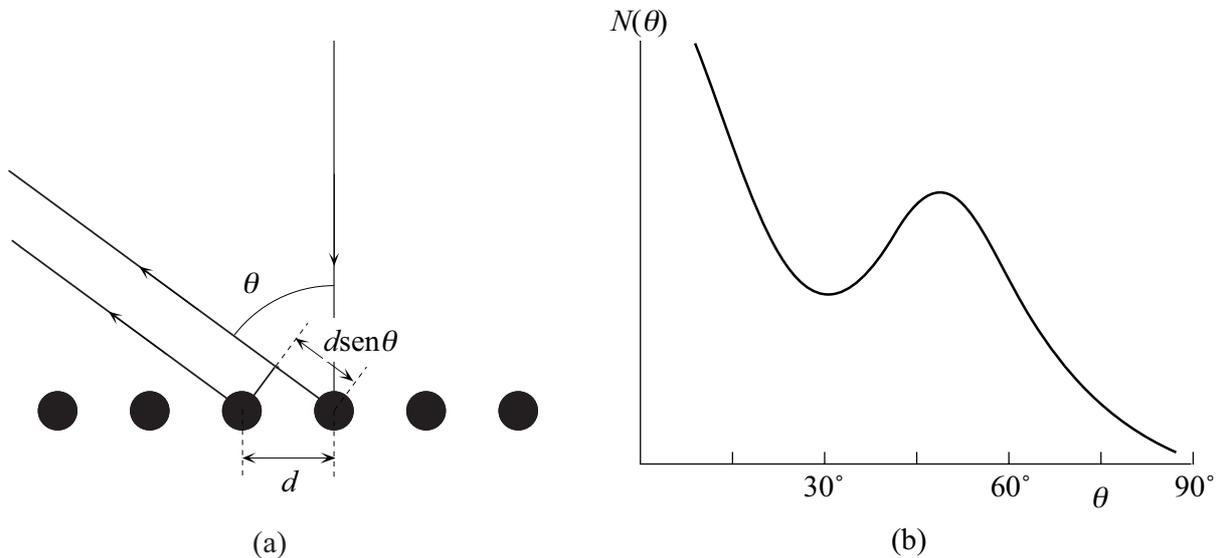


Fig. 6.2. Difracción de electrones: (a) esquema geométrico, (b) resultados.

En 1928 George P. Thomson (hijo de J. J. Thomson) observó la difracción de electrones en la transmisión a través de cristales. Poco después, Immanuel Estermann, Otto Frisch y Otto Stern encontraron efectos de difracción al dispersar átomos de He en la superficie de un cristal de LiF. Desde entonces se observaron muchos otros ejemplos de estos efectos, y la validez del postulado de Broglie quedó confirmada más allá de toda duda.

Vamos a ver ahora que las propiedades ondulatorias del electrón permiten identificar las razones físicas detrás de los hasta entonces misteriosos postulados de la teoría de Bohr y Sommerfeld (Capítulo 5).

Interpretación de la regla de cuantificación de Bohr

La longitud de onda de Broglie de un electrón cuya energía cinética es del orden de la energía cinética del electrón en el átomo de hidrógeno, es del mismo orden de magnitud que el tamaño del átomo. Por ese motivo es sensato esperar que las propiedades de las ondas piloto sean de fundamental importancia para el movimiento del electrón dentro del átomo. Por otra parte hay una importante diferencia entre el movimiento de una partícula libre que hemos considerado hasta ahora y el movimiento del electrón en un estado ligado. En el caso de una partícula libre la onda piloto es una onda viajera. En el caso de un electrón que recorre repetidamente una órbita, cabe esperar que la onda asociada sea estacionaria.

En 1924 de Broglie mostró que las propiedades de las ondas estacionarias permiten interpretar la regla de cuantificación de Bohr del momento angular

$$L = mvr = pr = nh/2\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.17)$$

En efecto, si sustituimos en esta ecuación la expresión del impulso $p = h/\lambda$, obtenemos

$$2\pi r = n\lambda \quad (6.18)$$

es decir: *la circunferencia de las órbitas permitidas contiene un número entero de longitudes de onda de Broglie*. Este es el significado de la condición de cuantificación de Bohr.

Si pensamos que el electrón recorre reiteradamente su órbita, la (6.18) es precisamente la condición necesaria para que la onda piloto asociada al movimiento del electrón se combine coherentemente consigo misma en sucesivos recorridos, de manera que se forme una onda estacionaria. Si se violara esa condición, al cabo de cierto número de vueltas, la onda piloto interferiría destructivamente consigo misma y su intensidad total se anularía. Puesto que la intensidad de la onda piloto se relaciona con la probabilidad de encontrar la partícula, esto implica que el electrón no se puede encontrar en una órbita que no cumpla la (6.18).

Más en general, en el caso de una partícula que efectúa un movimiento periódico se puede demostrar lo mismo. Por consiguiente llegamos a la

Interpretación de Broglie de las reglas de cuantificación de la Teoría Cuántica Antigua:

el requerimiento que la onda piloto asociada sea estacionaria equivale a pedir que el movimiento de la partícula cumpla las condiciones de cuantificación de Wilson-Sommerfeld.

Corresponde subrayar la enorme importancia conceptual de la interpretación de Broglie, que por fin aclara el origen físico de las reglas de cuantificación que hasta entonces era misterioso. Veremos más adelante que las propiedades de las ondas estacionarias tienen una importancia fundamental en la teoría de Schrödinger. Se mostrará que todo estado de energía definida del electrón está descrito por una onda estacionaria, y de resultados de ello todas las características observables de esos estados son *independientes del tiempo*, entre ellas la distribución de la carga eléctrica. Ese es el motivo porqué un electrón no emite ondas electromagnéticas cuando se encuentra en uno de los estados permitidos del átomo.

El principio de incerteza

La descripción del movimiento en términos de la onda piloto trae como consecuencia inevitable que no existe ningún estado de una partícula en el cual se puedan conocer con exactitud y simultáneamente su posición y su cantidad de movimiento. Esto es una consecuencia de propiedades generales de las ondas de cualquier naturaleza (y por lo tanto también de las ondas piloto), y del hecho que, de acuerdo con la interpretación de Broglie, la partícula está localizada donde la onda piloto tiene una amplitud no nula.

Para simplificar consideremos el movimiento de una partícula libre en una dimensión espacial x (la generalización a tres dimensiones es trivial). Supongamos que conocemos con exactitud la cantidad de movimiento p_x de la partícula; la relación (6.4) nos dice entonces que la longitud de onda de la onda piloto debe ser *exactamente* $\lambda_x = h/p_x$. La onda piloto es pues una onda monocromática que se extiende desde $x = -\infty$ a $x = +\infty$, del tipo

$$\Psi = Ae^{i(k_x x - \omega t)} \quad , \quad k_x = 2\pi/\lambda_x = p_x/\hbar \quad , \quad \omega = 2\pi\nu = E/\hbar \quad (6.19)$$

Luego una partícula cuyo impulso se conoce con exactitud puede tener cualquier posición. La onda piloto que describe una partícula localizada en el entorno de algún x no puede ser monocromática sino que debe ser un paquete del tipo (6.6) (Fig. 6.1), esto es

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k'_x) e^{-i\varphi(k'_x)} e^{i(k'_x x - \omega' t)} dk'_x \quad (6.20)$$

En un instante dado, por ejemplo $t = 0$, tendremos (recordando las (6.10) y (6.11)) que

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k'_x) e^{-i\varphi(k'_x)} e^{ik'_x x} dk'_x = e^{+i[k_x x - \varphi(k_x)]} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x + k''_x) e^{ik''_x (x - x_0)} dk''_x \quad (6.21)$$

Las ondas monocromáticas se superponen en fase en $x = x_0$ y por lo tanto $\Psi(x, 0)$ es máxima allí. Para $x \neq x_0$, las diferentes ondas con $k'_x = k_x + k''_x$ tienen desfases dados por $k''_x (x - x_0)$ y habrá interferencia destructiva cuando $|k''_x (x - x_0)| \approx \pi$. Si el ancho de la distribución espectral del paquete es Δk_x (esto es, si $A(k_x + k''_x)$ difiere apreciablemente de cero sólo si $|k''_x| < \Delta k_x$), su extensión espacial Δx es entonces (aproximadamente) $\Delta x \approx 2\pi / \Delta k_x$, y en consecuencia, recordando que $p_x = \hbar k_x$, resulta

$$\Delta x \Delta p_x \approx h \quad (6.22)$$

Este argumento muestra que hay una relación entre la incerteza de la posición de la partícula (dada por la extensión Δx del paquete) y la incerteza de su impulso (dada por el ancho $\Delta k_x = \Delta p_x / \hbar$ de la distribución espectral del mismo).

Se debe notar que la relación (6.22) es aproximada, porque no dimos aún una definición precisa de Δx y Δp_x . Esta definición depende de la relación entre Ψ y la probabilidad de encontrar la partícula en un determinado lugar, que aún no hemos especificado. Veremos en el próximo Capítulo que dicha probabilidad es proporcional a $|\Psi|^2$. Por lo tanto es natural definir Δx como la desviación standard desde la media, calculada con una distribución de probabilidad proporcional a $|\Psi|^2$. De modo análogo, Δp_x se puede definir en términos de $|A|^2$.

La herramienta matemática apropiada para manejar expresiones del tipo (6.20) es la *transformación* (o integral) *de Fourier*. La *transformada de Fourier* de la función $f(r)$ se indica con $F(s)$ y está definida por

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) e^{irs} dr \quad (6.23)$$

La transformación de Fourier se puede invertir por medio de la *integral de inversión*

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-irs} ds \quad (6.24)$$

y se dice que $F(s)$ es la *antitransformada de Fourier* de $f(r)$. Las transformadas de Fourier figuran en tablas (ver por ejemplo Gradshteyn y Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Pro-*

ducts, Academic Press, 1980) o se calculan numéricamente. De interés para nosotros son la transformada de Fourier de una constante, que es proporcional a la *función delta de Dirac*:

$$f(r) = 1 \quad , \quad F(s) = (2\pi)^{1/2} \delta(s) \quad (6.25)$$

y la transformada de Fourier de una Gaussiana, que es también una Gaussiana:

$$f(r) = e^{-r^2/2a^2} \quad , \quad F(s) = ae^{-a^2s^2/2} \quad (6.26)$$

De la (6.25) vemos que el paquete de ondas que describe una partícula perfectamente localizada en $x = 0$, es decir, tal que $\Psi(x) \propto \delta(x)$ se obtiene como una superposición del tipo (6.20) con $A(k'_x) = \text{cte.}$, es decir, una superposición de todos los posibles valores de k'_x , y por lo tanto de p_x . Por consiguiente, *si una partícula está exactamente localizada en una posición, su cantidad de movimiento es completamente indeterminada.*

El caso de una partícula cuya cantidad de movimiento se conoce con exactitud pero su posición está completamente indeterminada, y el de una partícula cuya posición se conoce con exactitud pero su cantidad de movimiento está completamente indeterminada son casos extremos. En general se conoce la cantidad de movimiento con una incerteza Δp_x y la posición con una incerteza Δx . En ese caso, las propiedades de la integral de Fourier permiten encontrar la relación entre Δx y Δp_x . Por ejemplo, supongamos tener un paquete Gaussiano de ancho Δk_x , esto es

$$A(k'_x) \propto e^{-(k'_x/2\Delta k_x)^2} \quad (6.27)$$

Entonces la (6.26) muestra que en $t = 0$, $\Psi(x)$ es una Gaussiana de ancho Δx :

$$\Psi(x) \propto e^{-(x/2\Delta x)^2} \quad (6.28)$$

donde los anchos Δk_x y Δx de las respectivas distribuciones de probabilidad (proporcionales a $|\Psi|^2$ y $|A|^2$) cumplen

$$\Delta x \Delta k_x = 1/2 \quad (6.29)$$

y recordando que $k_x = p_x / \hbar$, obtenemos que en $t = 0$ un paquete Gaussiano cumple²

$$\Delta x \Delta p_x = \hbar / 2 \quad (6.30)$$

La teoría de la transformación de Fourier permite demostrar que en general los anchos de $f(r)$ y de su transformada $F(s)$, definidos como las *desviaciones standard* desde las medias (calculadas en términos de $|f|^2$ y $|F|^2$), cumplen la relación

$$\Delta r \Delta s \geq 1/2 \quad (6.31)$$

² Se puede mostrar que para tiempos diferentes del inicial, el ancho Δx es mayor.

donde el signo = se cumple sólo cuando $f(r)$ y su transformada $F(s)$ son Gaussianas. En general la relación entre las incertezas de la posición y el impulso de una partícula es entonces:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2 \quad (6.32)$$

Generalizando lo anterior a tres dimensiones, llegamos al:

Principio de incerteza de Heisenberg:

si x, y, z son las coordenadas de una partícula y p_x, p_y, p_z son los respectivos impulsos conjugados, se cumple que

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar / 2 \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar / 2 \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar / 2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

en el caso de coordenadas angulares, entre cada coordenada θ y el correspondiente momento angular L_θ se cumple la relación de incerteza

$$\Delta \theta \Delta L_\theta \geq \hbar / 2 \quad (6.34)$$

Observemos que el principio de incerteza no establece restricciones sobre productos del tipo $\Delta x \Delta p_y, \Delta x \Delta y, \Delta p_x \Delta p_y$, etc.

La (6.32) establece solamente un *límite inferior* al producto $\Delta x \Delta p_x$. Es perfectamente posible tener situaciones en que $\Delta x \Delta p_x \gg \hbar$; esto ocurre cuando nuestras mediciones de la posición y el impulso no alcanzan la máxima precisión posible, compatible con el principio de incerteza. Puesto que \hbar es muy pequeño, es muy difícil que en una medición en escala macroscópica $\Delta x \Delta p_x$ sea comparable con \hbar , y por ese motivo el principio de incerteza es *irrelevante* en los experimentos de la Mecánica Clásica. Sin embargo, sus consecuencias son muy importantes cuando se consideran las distancias y los impulsos de los sistemas atómicos y nucleares. Como prueba de ello vamos a mostrar que *el tamaño del átomo está determinado por el principio de incerteza*.

Consideremos, para simplificar, un átomo de hidrógeno. Podemos expresar la energía del electrón como la suma de la energía cinética $\mathbf{p}^2 / 2m_e$ más la energía potencial $-e^2 / r$:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r} \quad (6.35)$$

La incerteza de la posición del electrón es $\Delta r \approx r$, y por consiguiente la incerteza de su impulso es $\Delta \mathbf{p} \approx \hbar / \Delta r$, por lo tanto $\mathbf{p}^2 \approx (\Delta \mathbf{p})^2 \approx \hbar^2 / (\Delta r)^2$. Sustituyendo en (6.35) obtenemos

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e(\Delta r)^2} - \frac{e^2}{\Delta r} \quad (6.36)$$

El estado de menor energía se obtiene requiriendo que

$$\frac{dE}{d\Delta r} = -\frac{1}{(\Delta r)^2} \left(\frac{\hbar^2}{m_e \Delta r} - e^2 \right) = 0 \quad (6.37)$$

lo que nos da

$$\Delta r = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = a_0 \quad (6.38)$$

es decir $r = a_0$. Por lo tanto:

El radio de Bohr, que nos da el tamaño del átomo de hidrógeno, se obtiene pidiendo que la energía del átomo tenga el mínimo valor compatible con el principio de incerteza.

Interpretación física de Heisenberg del principio de incerteza

En nuestra presentación, el principio de incerteza surge como una consecuencia matemática de la hipótesis de Broglie, que asocia a cada partícula una onda piloto que describe su movimiento. Pero debemos recordar que cuando Werner Heisenberg introdujo en 1927 el principio de incerteza, sus argumentos no se basaron en la hipótesis de Broglie, sino en las propiedades corpusculares de la radiación electromagnética y sus consecuencias sobre el proceso de medición. De esta forma, Heisenberg puso de manifiesto que existe un límite natural insuperable a la precisión con la que se pueden medir simultáneamente la posición y el impulso de una partícula, debido a que *la medición de una de estas cantidades inevitablemente perturba a la partícula de modo tal que deja incierto el valor de la otra cantidad*. Este es el origen físico del principio de incerteza.

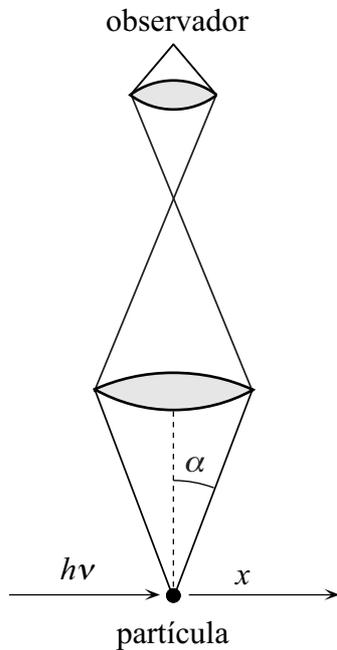


Fig. 6.3. Microscopio de Heisenberg.

La naturaleza de los argumentos de Heisenberg se entiende si examinamos un “experimento de pizarrón” ideado por Bohr en 1928. Consideremos el dispositivo de la Fig. 6.3. Con el microscopio se desea determinar la posición instantánea de la partícula, que podemos ver por medio de los fotones que dispersa cuando se la ilumina. El poder de resolución del microscopio es $\lambda/\text{sen}\alpha$ (λ es la longitud de onda y α es el semiángulo subtendido por el objetivo del microscopio), por lo tanto la indeterminación de la medida es

$$\Delta x \cong \frac{\lambda}{\text{sen}\alpha} \quad (6.39)$$

Supongamos que basta ver un fotón para llevar a cabo la medida. Claramente, el microscopio capta el fotón cuando éste es dispersado en un ángulo comprendido entre $-\alpha$ y $+\alpha$. Luego la incerteza de la componente x del impulso del fotón después de la dispersión es

$$(\Delta p_x)_{\text{fotón}} = 2p\text{sen}\alpha = \frac{2h\text{sen}\alpha}{\lambda} \quad (6.40)$$

pues $p_{\text{fotón}} = h/\lambda$. Ahora bien, como la componente x del impulso del fotón se puede conocer exactamente antes de la dispersión (no hace falta conocer la coordenada x del cuanto), la conservación de la cantidad de movimiento implica que la partícula adquiere un impulso cuya magnitud es incierta en una cantidad igual a la incerteza del impulso del fotón, es decir

$$\Delta p_x = (\Delta p_x)_{\text{fotón}} = \frac{2h\text{sen}\alpha}{\lambda} \quad (6.41)$$

Por lo tanto, en el instante de la medición tenemos que

$$\Delta x \Delta p_x \approx 2h > h \quad (6.42)$$

Si se usa luz de longitud de onda más corta, la medida de la posición es más precisa, pero al mismo tiempo aumenta la incerteza del impulso de la partícula.

Esta discusión muestra que el principio de incerteza es consecuencia de la cuantificación de la radiación electromagnética, y se origina porque para observar la partícula es preciso dispersar por lo menos *un* fotón. En otras palabras, es imposible observar la partícula por medio de una iluminación que le imparta un impulso arbitrariamente pequeño. Debido a la cuantificación, el fotón es el intermediario indispensable entre la partícula y el instrumento de medida, y perturba la partícula de una manera incontrolable e impredecible. Por lo tanto es imposible, después de la medida, conocer con exactitud la posición y la cantidad de movimiento de la partícula. Las relaciones de incerteza (6.32) y (6.33) expresan que la constante de Planck es la medida de la *magnitud mínima* de esa perturbación incontrolable³.

La relación de incerteza entre la energía y el tiempo

Consideremos un grupo de ondas del tipo

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k'_x) e^{-i\varphi(k'_x)} e^{i(k'_x x - \omega' t)} dk'_x, \quad \omega' = \omega(k'_x) \quad (6.43)$$

cuya longitud es Δx . El tiempo que necesita el grupo para recorrer la distancia Δx es

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{\Delta x}{v_x} \quad (6.44)$$

donde v_x es la componente x de la velocidad de la partícula. Por lo tanto Δt es la incerteza con la cual se conoce el instante en el cual el grupo pasa por un determinado lugar. Pero igualmente, podemos interpretar que Δt es el intervalo de tiempo durante en cual un observador ubicado en una posición fija x puede llevar a cabo mediciones sobre la partícula.

Por otra parte el grupo es una superposición de ondas de diferentes k'_x , por lo tanto de diferentes frecuencias, y por ende de diferentes energías $E' = \hbar\omega' = \hbar\omega(k'_x)$. De la relación

³ En el libro de Heisenberg *The Physical Principles of Quantum Mechanics* (Dover, 1930) el lector puede encontrar una extensa discusión del principio de incerteza y de numerosos ‘experimentos de pizarrón’ que ilustran su origen físico.

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{\partial E}{\partial p_x} = (v_g)_x = v_x \quad (6.45)$$

resulta que la incerteza en p_x implica una incerteza en la energía de la partícula, dada por

$$\Delta E = v_x \Delta p_x \quad (6.46)$$

Tomando el producto de (6.44) por (6.46) y usando la relación de incerteza $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ obtenemos entonces una relación entre el tiempo Δt durante el cual se observa la partícula y la incerteza ΔE de su energía:

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar/2 \quad (6.47)$$

La interpretación de Heisenberg de la relación de incerteza (6.47) es más amplia y se enuncia de la manera siguiente:

Relación de incerteza entre la energía y el tiempo:
una medida de la energía de un sistema efectuada durante el tiempo Δt tiene una incerteza ΔE , y se cumple que $\Delta t \Delta E \geq \hbar/2$.

Veremos más adelante ejemplos de situaciones donde se aplica esta relación de incerteza.

La dispersión de un paquete de ondas

Consideremos un paquete de ondas que describe una partícula libre, de la forma (6.6):

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k') e^{i(k'x - \omega't)} dk' \quad (6.48)$$

y sea Δk_x es el ancho de la distribución espectral $A(k')$. En la (6.48) pusimos $\varphi(k') = 0$ de modo que el grupo está localizado en $x = 0$ cuando $t = 0$.

En $t = 0$ la (6.48) se reduce a

$$\Psi(x,0) = e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k') e^{ik''x} dk'' \quad (6.49)$$

donde $k' = k + k''$. Para estudiar la evolución temporal del paquete desarrollamos el exponente imaginario de la (6.48) en potencias de k'' , pero a diferencia de lo que hicimos antes (ec. (6.10)) vamos a conservar los términos cuadráticos. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} k'x - \omega(k')t &= (k + k'')x - \omega(k + k'')t = kx - \omega(k)t + \left(x - \frac{\partial \omega}{\partial k} t\right) k'' - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} t k''^2 \\ &= kx - \omega(k)t + (x - vt)k'' - \frac{\hbar}{2m} t k''^2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

donde para escribir el último renglón usamos que $\partial \omega / \partial k = v_g = v = p/m = \hbar k/m$, y por lo tanto que $\partial^2 \omega / \partial k^2 = \hbar/m$. Sustituyendo (6.50) en (6.48) obtenemos

$$\Psi(x, t) = e^{i[kx - \omega(k)t]} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k') e^{i\left[(x-vt)k'' - \frac{\hbar}{2m}tk''^2\right]} dk'' \quad (6.51)$$

Comparando la (6.51) con la (6.49) vemos que *si ignoráramos* el término cuadrático en k'' de la exponencial en el integrando de la (6.51), se tendría que $\Psi(x, t) = e^{-i\omega(k)t}\Psi(x - vt, 0)$, esto es, el grupo se movería sin cambiar de forma (la fase $e^{-i\omega(k)t}$ es irrelevante). Es precisamente el término $\hbar tk''^2 / 2m$ el que da lugar a la dispersión del grupo, al introducir un desfase creciente con el tiempo entre las diferentes ondas monocromáticas que lo componen. La condición de interferencia destructiva es ahora

$$\left| \Delta k \left(\delta x_t - \frac{\hbar}{2m} t \Delta k \right) \right| \approx \pi \quad (6.52)$$

donde hemos escrito $\delta x_t = x - vt$ para indicar el apartamiento desde el centro del grupo. De la (6.52) resulta que el ancho del grupo es entonces

$$\Delta x_t = 2\delta x_t \approx \frac{2\pi}{\Delta k} + \frac{\hbar}{m} t \Delta k \quad (6.53)$$

que podemos escribir en la forma

$$\Delta x_t \approx \frac{h}{\Delta p} + \frac{\Delta p}{m} t = \Delta x_0 + \Delta v t \quad (6.54)$$

La (6.54) muestra que el ancho del paquete crece linealmente con el tiempo desde su valor mínimo $\Delta x_0 \approx h / \Delta p$ para $t = 0$, dado por el principio de incerteza.

Este resultado es coherente con lo que se obtiene clásicamente. En efecto, en la Mecánica Clásica, si en $t = 0$ determinamos la posición de una partícula con una incerteza Δx_0 y su velocidad con una incerteza Δv (debido a las limitaciones de los instrumentos de medida), después de transcurrir un tiempo t la incerteza de la posición es precisamente la que resulta de la ec. (6.54). En este sentido, la fórmula (6.54) no nos dice nada nuevo. La novedad es que ahora, a diferencia de lo que ocurre en la Mecánica Clásica, Δx_0 y Δv *no son independientes* pues están relacionados por el principio de incerteza $\Delta x_0 \Delta v \approx h / m$. De resultados de eso la (6.54) se puede escribir

$$\Delta x_t = \Delta x_0 + \frac{h}{m \Delta x_0} t \quad (6.55)$$

De la (6.55) vemos que cuanto menor es la incerteza Δx_0 , tanto más rápidamente crece Δx_t .

El principio de complementariedad

El principio de incerteza permite resolver las aparentes paradojas que se originan en la dualidad onda-corpúsculo de la radiación y la materia. Si se intenta determinar si la radiación es una onda o un corpúsculo, resulta que todo experimento que fuerza a radiación a exhibir su carácter ondulatorio, al mismo tiempo suprime las manifestaciones de su carácter corpuscular,

y viceversa. Es decir, en una misma situación experimental no se pueden observar a la vez los aspectos ondulatorio y corpuscular. Lo mismo ocurre con la materia. De resultados de ello las evidencias obtenidas bajo distintas condiciones experimentales no se pueden captar en una única imagen, sino que son complementarias, en el sentido que sólo la totalidad de los fenómenos agota la posible información sobre el objeto del estudio. Esto es consecuencia de que a nivel atómico es imposible separar netamente el comportamiento de los objetos (fotones, electrones, etc.) de la interacción con el instrumento de medida, que define las condiciones bajo las cuales aparece el fenómeno. Esta es la esencia del *principio de complementariedad* de Bohr: los conceptos de onda y partícula no se contradicen sino que se complementan.

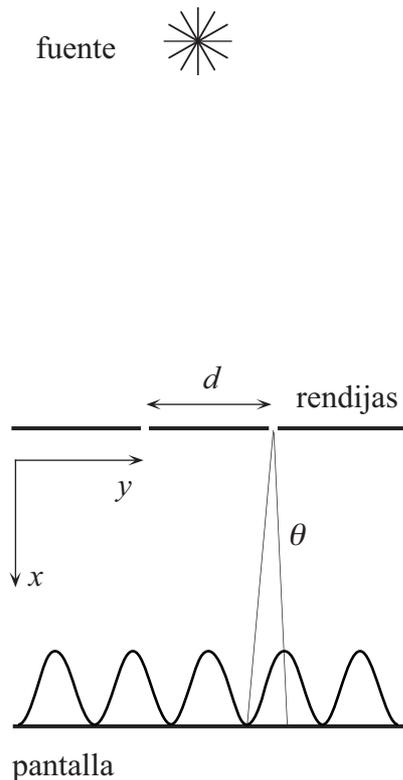


Fig. 6.4. Interferencia por dos rendijas.

Consideremos, por ejemplo, el experimento de Young de interferencia de luz por dos rendijas (o en forma equivalente, la interferencia de electrones) cuyo esquema se da en la Fig. 6.4. La distancia entre las rendijas es d .

Del punto de vista ondulatorio, la onda original se divide en dos ondas coherentes al pasar por las rendijas, y la superposición de ambas produce las características franjas de interferencia en la pantalla.

Supongamos ahora que reemplazamos la pantalla por un mosaico de minúsculos fotocátodos, de manera que midiendo la corriente producida por la emisión del correspondiente fotoelectrón podemos determinar en qué lugar de la pantalla ha llegado cada fotón. Igualmente, la distribución de los fotoelectrones sigue el mismo patrón de interferencia. Sin embargo, cada fotón individual llega a un lugar bien definido de la pantalla: el del fotocátodo donde fue absorbido.

Si se piensa en el fotón como un corpúsculo, parece lógico pensar que tiene que pasar o por una, o por la otra de las rendijas, pero en este caso se plantea una paradoja, pues a primera vista parece absurdo que el movimiento del fotón más allá de las rendijas esté influenciado por la presencia de la rendija por la cual no pasó.

La paradoja proviene de suponer que el fotón debe pasar por una rendija o por la otra. Tal afirmación no tiene sentido a menos que se determine experimentalmente por cuál de las dos rendijas ha pasado. Sin embargo, resulta que esa determinación es imposible de lograr, sin destruir el patrón de interferencia.

En efecto, para determinar por cuál rendija pasa el fotón habría que poner un detector en cada rendija. Pero el detector inevitablemente interactúa con el fotón y altera la trayectoria que de otra forma seguiría. El principio de incerteza permite demostrar que si el detector tiene suficiente resolución espacial como para poder determinar por cuál rendija pasó el fotón, entonces la perturbación que produce en el impulso del fotón causa una desviación que destruye el patrón de interferencia de dos rendijas.

6. Propiedades ondulatorias de la materia

Supongamos, para concretar, que con nuestro detector determinamos la coordenada y del fotón con una incerteza

$$\Delta y \ll d. \quad (6.56)$$

con lo cual podemos asegurar por cuál rendija pasó.

En este proceso de detección hay una interacción que cambia el impulso del fotón; de resultas de ello la componente y del impulso tendrá una incerteza Δp_y . Para no destruir el patrón de interferencia, Δp_y debe ser tal que

$$\Delta p_y / p_x \ll \theta \quad (6.57)$$

donde p_x es la componente x del impulso del fotón y θ es el ángulo subtendido desde la rendija por la posición de un máximo y la del mínimo adyacente, que vale

$$\theta = \lambda / 2d \quad (6.58)$$

Sustituyendo (6.58) en (6.57) obtenemos

$$\Delta p_y \ll p_x \lambda / 2d = h / 2d \quad (6.59)$$

pues $\lambda \equiv h / p_x$. Multiplicando ahora las desigualdades (6.56) y (6.59) obtenemos que la condición que se debe satisfacer para determinar por cuál rendija pasa el fotón, *sin destruir el patrón de interferencia*, es

$$\Delta y \Delta p_y \ll h / 2 \quad (6.60)$$

Pero esta condición viola el principio de incerteza. Por lo tanto *no podemos saber por cuál rendija pasó el fotón y al mismo tiempo ver la figura de interferencia*. Esto significa que el problema que nos preocupa es ilusorio.

Veremos luego otros ejemplos en que el principio de incerteza ayuda a resolver conflictos aparentes entre los aspectos ondulatorios y corpusculares de un ente.